
GOOL
בשביל התירגול
קורסים ברשת שבאמת עובדים!
בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הוא פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד על פי תכנית הלימודים של משרד החינוך. כל פרק פותח בסיכום ההגדרות, המשפטים והמתכונים הקשורים לנושא הפרק, לאחריו מופיעה טבלת הסרטונים באתר ולבסוף קובץ תרגילים. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.bagrut.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

בשביל התירגול

תוכן העניינים:

<u>הערות:</u>

1. הסקיצות בשאלות החקירה מופיעות בצורה מרוכזת בסוף דפי התשובות.
2. כל פרק מכיל סרטוני תיאוריה ותרגול מלאים ומפורטים באתר, למעט החלקים "תירגול נוסף".

פרק 1 – גיאומטריה אנליטית:

נקודה וישר:

נוסחאות כלליות:

1. המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
2. אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.
3. שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

משוואת הישר:

4. משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.
5. נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

מצב הדדי בין שני ישרים:

6. ישרים מקבילים מקיימים: $m_1=m_2\ ,\ n_1\neq n_2$.
7. ישרים חותכים מקיימים: $m_1\neq m_2$.
8. ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1=m_2\ ,\ n_1=n_2$.

שיפועים של ישרים:

9. שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
10. הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x: $m=\tan\alpha$.

חלוקת קטע ביחס נתון:

11. שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$
הם: $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}\ ;\ x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$ (בהצלבה).

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

12. הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.

13. מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

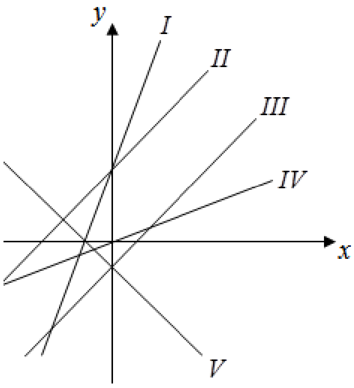
14. כאשר: $B>0$:
- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

<u>שאלות:</u>

1) הנקודות $A(2,-7),B(-10,4)$ ו- $C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי.

2) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

3) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:



א. $y=x+3$.

ב. $y=-x-1$.

ג. $y=2x+3$.

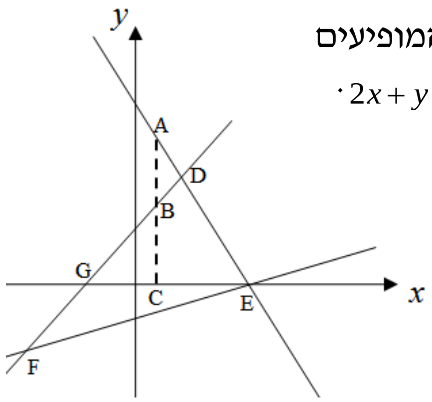
ד. $y=x-1$.

ה. $y=\frac{1}{2}x$.

4) במשולש ABC נתונים שיעורי הקדקודים: $C(-5,5)$, $B(3,7)$, $A(5,-1)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

5) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקדקודים $A(-9,1)$ ו- $B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.
א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

6) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט : $x-4y-4=0$, $x-y+2=0$, $2x+y-8=0$.



א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון : BC = 3. חשב את אורך הקטע AB.

7) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקדקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון : $A(2,-5)$, $B(-12,16)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי : $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

9) קדקודי משולש ABC הם : $A(-1,3)$, $B(6,0)$, $C(4,-12)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

10) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקדקודיו הם : $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

11) קודקודי המשולש ABC הם : $A(5,1)$, $B(7,-3)$, $C(-1,4)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקדקוד A.

12) א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.
ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.
ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

13) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן
מהישר $2x-y+5=0$ הוא : $\sqrt{20}$.

14) מצא את שטחו של משולש שקדקודיו הם : $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(-5,-2)$.

15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקדקודים : $A(1,1)$, $B(13,6)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

16) נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:

I: $x+2y+1=0$,   II: $x-2y-11=0$,   III: $2x-y+6=0$

מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

17) מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

18) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

19) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

20) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

21) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

22) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

23) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB:\ 3x+y=0$ ו- $CD:\ 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

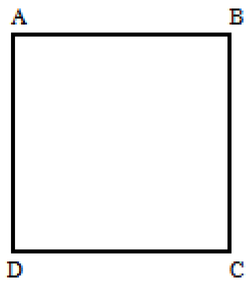
24) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

25) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

26) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

27) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD? הראה חישוב מתאים.



נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- ס"מ $BC=\sqrt{90}$.

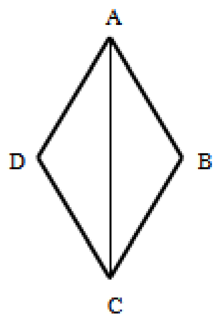
ב. איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת? הראה חישוב מתאים.

נתון גם: $B(-8,7)$.

ג. איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת? הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

28) המרובע ABCD הוא מעוין.



ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.

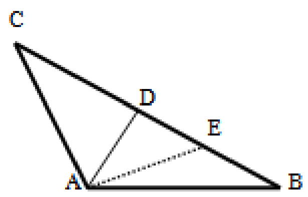
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y+x=4$.

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קודקודי המעוין.

29) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.

מעבירים במשולש את הגובה לבסיס AD ומסמנים נקודה E על הבסיס BC כך שמתקיים: DE =BE.



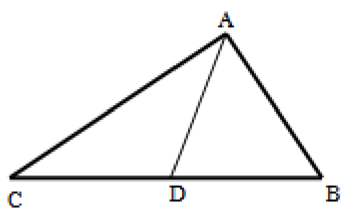
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $D(5,7)$, $E(8.5,2.5)$.

א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.

30) נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.

הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה- x של הנקודה C הוא: $x_C=-1$. כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB}=-2$.



א. מצא את משוואת הצלע AB.

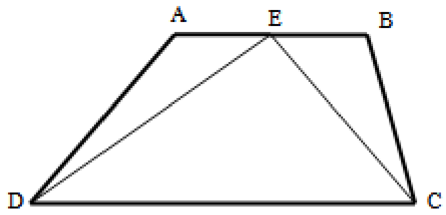
ב. 1. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

2. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. 1. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

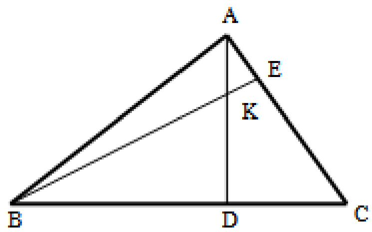
2. איזה משולש הוא המשולש ABC?

31) המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x. שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$ כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\angle DEC = 90^\circ$



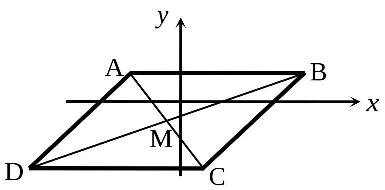
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.
ב. מצא את משוואת הקטע CE
ואת משוואת הבסיס CD.
ג. מצא את שיעורי הנקודה C.
ד. חשב את שטח המשולש DEC.

32) AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.
ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.
שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$, $D(-2,4)$.



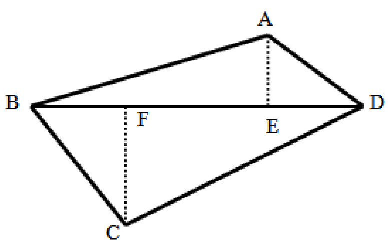
א. מצא את משוואת הגובה AD
ואת משוואת הצלע AC.
ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.
ג. מצא את משוואת הגובה BE
ואת משוואת הצלע BC.
ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

33) נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על הישר $y=-7$.
אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5,-3)$.
שיפוע האלכסון AC הוא -4.



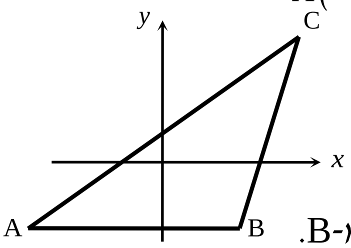
א. מצא את משוואת האלכסון AC.
ב. מצא את שיעורי הנקודה C.
ג. חשב את שטח המשולש BMC.

34) נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.
מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.



א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

35) על הישר $y=-5$ מסמנים את הנקודות: $A(-7,-5)\ ;\ B(2,-5)$.



הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

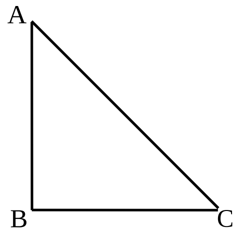
א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

1. הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.
2. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ג. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB. ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי. מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

36) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$



ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. 1. מצא את משוואת הצלע AC.

2. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. 1. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90^\circ)$.

2. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.

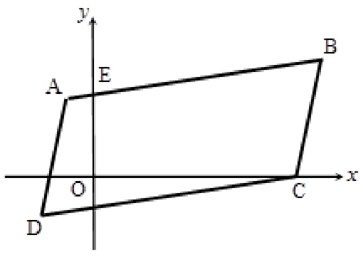
37) באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קדקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$ ו-$B(x,4)$. (x ו-y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את x ו-y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-x בחלקו החיובי
וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C
(מצא שתי אפשרויות).



ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה-y ב-E. שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש.
מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

<u>תשובות סופיות:</u>

1) $D(18,0)$ **2)** $B(-1,-3)$. **3)** א. II. ב. V. ג. I. ד. III. ה. IV.

5) א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{2}x-6\frac{3}{2}$.

6) א. 18 יח״ש $= S_{DEF}$. ב. 3 יחידות אורך = AB. **7)** $C(14,5)$.

8) $P(-2,1)$. **9)** $M(3,-3)$. **10)** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. **11)** 1.697 יחידות אורך.

12) א. 3. ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$. ג. 2. **13)** $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$, $(4,3)$. **14)** 2.5 יח״ש $= S_{ABC}$.

15) $C(11,3)$. **16)** $(-1,-4)$. **17)** $y=3x-4$. **18)** $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$, $y=2x+10$.

19) $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$ או $x=1$. **20)** $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$ או $x=10$. **21)** $y=-\frac{4}{3}x-7$.

22) $3x-4y-12=0$, $3x-4y+28=0$. **23)** 14.4 יח״ש $= S$, $(2.1,-3.3)$.

24) $y=-\frac{2}{3}x+3$, $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$, $3x-2y-15=0$. **25)** $y=3x$. **26)** $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$.

27) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. 90 יח״ש = S.

28) א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$. ב. $(5,5),(4,0),(-1,1)$. **29)** א. $B(12,-2)$, $C(-2,16)$. ב. $y=-8x$.

30) א. $y=-2x+22$. ב. 1. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים
שווי שטח הוא תיכון. 2. $B(9,4)$, $D(4,4)$. ג. 1. $AD=5$, $BC=10$.
2. משולש ישר זווית – אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז
המשולש הוא ישר זווית.

31) א. $E(-1,0)$, $A(-5,-2)$, $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$, $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.
ג. $C(5,-3)$. ד. 30 יח״ש $= S_{DEC}$. **32)** א. $AC: y=-x+8$, $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$.
ב. $A(7,1)$. ג. $BC: y=3x+10$, $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

33) א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. 34 סמ״ר $= S_{BMC}=S_{DMC}$.

34) א. $y=x+6$, $d_{BD}=\sqrt{200}$. ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$. ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$, $d_{CF}=\sqrt{72}$.
ד. $S_{ABCD}=80$. **35)** א. $C(t,t-5)$. ב. 1. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$; $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$.
2. 10 ס״מ $BC=$; $t=8$. ג. $D(-20,-5)$.

36) א. $x=-2$. ג. 1. $y=-0.5x+10$ 2. $D(0,10)$ ד. 1. $E(2,4)$. 2. $\frac{S_{DCE}}{S}=\frac{1}{2}$.

37) א. $x=9$; $y=2$. ב. $C(10,0)$, $C(8,0)$. ג. $C(8,0)$.

המעגל:

הגדרה:
המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

משוואת מעגל:
משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $\mathrm{M}(a,b)$ ורדיוסו R היא: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

משוואת מעגל קנוני:
משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $\mathrm{M}(0,0)$) ורדיוסו R היא: $x^2+y^2=R^2$.

משיק למעגל:
משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בנקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ שעליו
היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ היוצאים מהנקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ שמחוץ למעגל היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

<u>**שאלות:**</u>

1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

2) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

3) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

4) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

5) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- x מיתר שאורכו 12.

6) מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקדקודיו הם: $C(-30,28)$, $B(-10,40)$, $A(22,-24)$.

7) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

8) מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה- y ולישר $y=6$ ומרכזו על הישר $y=3x-2$ ברביע הראשון.

9) מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

10) נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- x. מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

11) נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

12) נתון ישר שמשוואתו $y=x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=32$ בשתי נקודות, A ו- B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

13) בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר $3x-y-9=0$ והשוק AD מונחת על הישר $x+y-3=0$.
שיעורי קדקוד B הם $(3,-8)$.
מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז $ABCD$.

14) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים :

א. $x^2+10x+v^2+6v-2=0$ ב. $x^2-2x+v^2+20v+1=0$

ג. $x^2-8x+v^2-14v=0$ ד. $x^2+v^2+2v=0$

ה. $x^2+x+v^2-3\frac{3}{}=0$ ו. $x^2-2mx+y^2+6my+m^2=0$

15) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-6mx-2(m+2)y+4m+4=0$.
מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y=2x+7$.

16) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-8x+12y-48=0$.
מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y=2x-4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

17) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה (1.8) המשיק לשני הצירים.

18) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+14y+37=0$ היוצא מהנקודה $A(10.-3)$.

19) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ בנקודה $A(5.-4)$.

20) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$ בנקודות שבהן $x=-1$.

21) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2,6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו- B.
א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו- B מקבילים זה לזה.
ב. הוכח את סעיף א׳ בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

22) נתון המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ והישר $y=2x+m$.
לאלו ערכים של הפרמטר m הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

23) א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+v^2+2x-19=0$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3.8)$.
ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+(v-1)^2=5$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5,1)$.

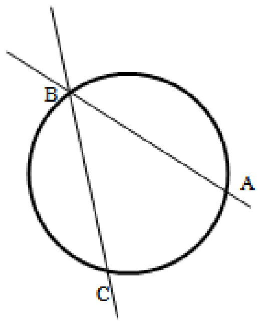
24) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x+48=0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק החיובי של ציר ה- y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה- y בנקודה Q. נתון: $PQ=14$.
מצא את שיעורי הנקודה Q.

25) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x-12y+64=0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

26) המעגלים $x^2+y^2+22x-6y=m$ ו- $x^2+y^2=26$ נחתכים בזווית ישרה.
מצא את ערכו של m.

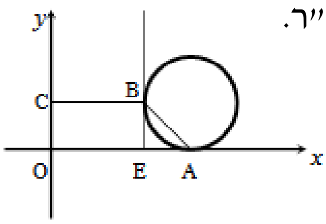
27) מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x-y+10=0$.

28) הישרים: $9y+11x=94$ ו- $y=-3x+14$ נחתכים בנקודה B.
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9.1)$.
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).



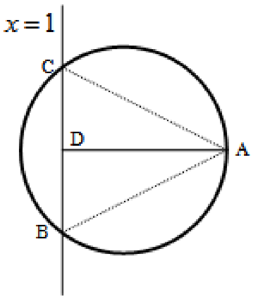
א. מצא את שיעורי הנקודה B.
ב. מצא את משוואת המעגל.
ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y=-3x+14$ עם המעגל.

29) נתון מעגל המשיק לציר ה- x בנקודה A.
מהנקודה E שעל ציר ה- x מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה- x ו-O היא נקודת ראשית הצירים.
יוצרים טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.
ידוע כי: $C(0.10)$ ו- $AE=10$ ס"מ.



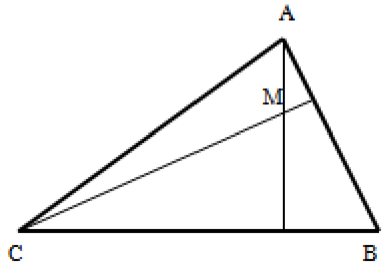
א. 1. מצא את שיעורי הנקודה B.
2. מצא את שיעורי הנקודה A.
ב. כתוב את משוואת המעגל.

30) הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2+(y-4)^2=R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.



א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
ג. 1. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$:
2. חשב את שטח המשולש ABC.

31) נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה: $2y-x=56$ ו- $8y+x=104$. מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.

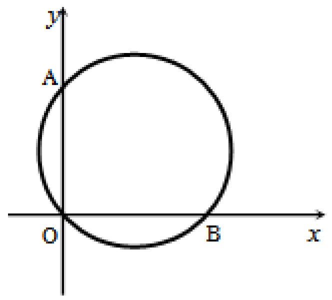


א. מצא את משוואות הגבהים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

32) באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.
המעגל חותך את הצירים בנקודות A , B ו-O.



א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.

ג. חשב את היקף המלבן.

33) המעגל: $(x+a)^2+(y-1)^2=a+4$, $a>0$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=1$.

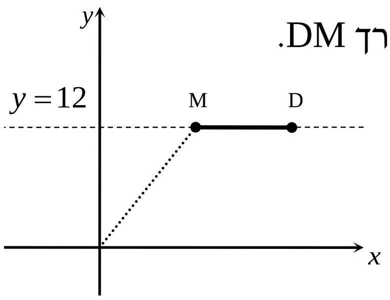
א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל: $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.

ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.

ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

34) הנקודות M ו-D נמצאות על הישר: $y=12$.
ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב- 6 מהמרחק בין הנקודות D ו-M (ראה איור).
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו והוא האורך DM.



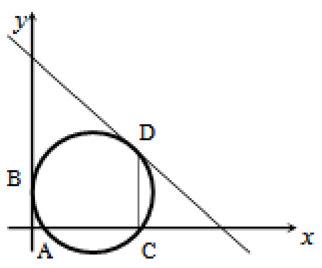
א. 1. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.

2. מצא את שיעור ה- x של הנקודה D.

ב. כתוב את משוואת המעגל.

ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים?
הראה חישוב מתאים לטענתך.

35) מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה- y בנקודה B וחותך את ציר ה- x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



א. כתוב את משוואת המעגל.

מהנקודה C מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.

דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.

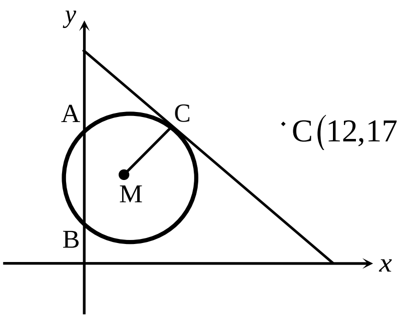
ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

36) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.

המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B.

מעבירים משיק למעגל: $6x+7y=191$ דרך הנקודה: $C(12,17)$.



א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.

ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר: $y=10$.

1. מצא את שיעורי הנקודה M.
2. מצא את אורך רדיוס המעגל.
3. כתוב את משוואת המעגל.

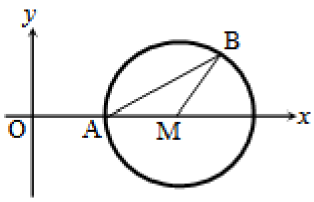
ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y.

ד. חשב את שטח המשולש AMB.

37) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- x.

המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה A. מסמנים את ראשית הצירים ב-O.

ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5,0)$.



א. מצא את משוואת המעגל.

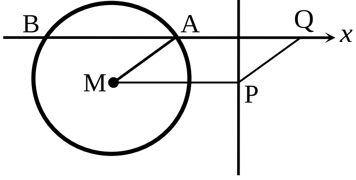
ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.

ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.

38) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=8$.

מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x ב-A ו-B (ראה איור).



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

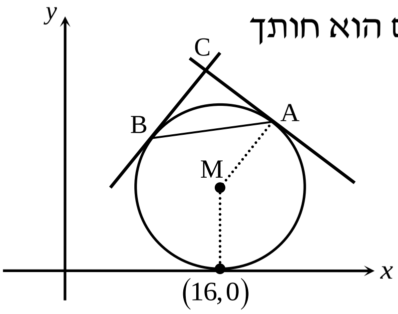
מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת מרכז המעגל M ומסמנים את חיתוכם ב-P.

ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.

ג. כתוב את משוואת הישר PQ.

ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2,-4)$.

39) נתון מעגל שרדיוסו R , $(R<16)$ ומשיק לציר ה- x בנקודה שבה : $x=16$.



א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- y או לא. נמק.

מהנקודה $\mathrm{A}(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

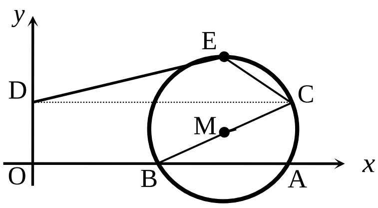
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה : $x_{\mathrm{B}}<x_{\mathrm{M}}$ אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה C.

1. מצא את שיעורי הנקודה C.
2. מצא את שטח המשולש ABC.

40) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו : $(x+a)^2+(y-1)^2=5$, a פרמטר.

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה : $\mathrm{A}(10,0)$.



א. מצא את a אם ידוע כי : $a>-10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- x .

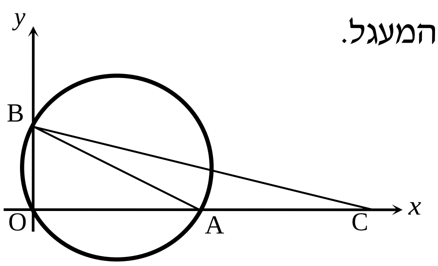
ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- y בנקודה D. הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה- y הגדול ביותר על המעגל. מחברים את הנקודות E ו-D כך שנוצר המחומש DECBO. חשב את שטחו.

41) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו : $(x-5)^2+(y-3)^2=R^2$, R רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.



א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה- x כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

1. מצא את שיעורי הנקודה C.
2. חשב את שטח המשולש ABC.

<u>תשובות סופיות:</u>

1) א. $M(3,-5)$, $R=7$ ב. $M(-0.5,0)$, $R=\sqrt{10}$ ג. $M(m,-n)$, $R=\sqrt{m^2+n^2}$.

2) $(x-2)^2+(y+1)^2=72$ $M(3,-3)$.

3) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y-14.6)^2=169$. **4)** $(x-1)^2+y^2=18$.

5) $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$ **6)** $(x+2)^2+(y-4)^2=1360$

7) $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$. **8)** $(x-2)^2+(y-4)^2=4$

9) $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$ **10)** א. $(0,-8)$, $(6,0)$, $(0,0)$ ב. 27 יח"ש.

11) 12.5 יחידות אורך. **12)** $(x-8)^2+(y-8)^2=32$, $y=-x+8$.

13) $(x-1)^2+(y+4)^2=20$.

14) א. $M(-5,-3)$, $R=6$. ב. $M(1,-10)$, $R=10$. ג. $M(4,7)$, $R=\sqrt{65}$.
ד. $M(0,-1)$, $R=1$. ה. $M(-0.5,0)$, $R=2$. ו. $M(m,-3m)$, $R=3m$.

15) $m=-1$. **16)** $2\sqrt{80}$. **17)** $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ או $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

18) 8. **19)** משיק: $y=3x-19$, נורמל: $x+3y+7=0$. **20)** $(-5,1)$.

22) משיק: $m=-9,11$, חותך: $-9<m<11$. **23)** א. $x-4y+11=0$. ב. $x=-1$.

24) $Q(0,-8)$ או $Q(0,-6)$. **25)** $4x-3y+20=0$, $A(-3.2,2.4)$, $x^2+y^2=16$.

26) $m=-26$. **27)** $(x+3)^2+(y-1)^2=10$.

28) א. $(2,8)$. ב. $(x+9)^2+(y-1)^2=170$. ג. $(4,2)$.

29) א. 1. $B(12,10)$. 2. $A(22,0)$. ב. $(x-22)^2+(y-10)^2=100$.

30) א. $R=10$. ב. $C(1,12)$, $B(1,-4)$. ג. 1. $d=16$. 2. $S=128$.

31) א. $y=8x-2$, $y=2x-2$. ב. $(-24,16)$. ג. $x^2+(y+2)^2=900$.

32) א. $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(8,0)$. ב. $C(8,6)$. ג. 28 יח"ש = S.

33) א. $a=1$. ב. $(0,-1)$, $(-2,3)$. ג. $y=-2x-1$. ד. $S=\frac{1}{4}$.

34) א.1. $d=15$. 2. $x=18$. ב. $(x-9)^2+(y-12)^2=81$.
ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- x – כאשר מציבים ב- y אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה אחת – $(12,0)$.

35) א. $(x-15)^2+(y-12)^2=225$. ב. $C(24,0)$, $D(24,24)$. ג. $y=-\frac{3}{4}x+42$.

36) א. $y=\frac{7}{6}x+3$. ב. 1. $\text{M}(6,10)$. 2. $\sqrt{85}$. 3. $(x-6)^2+(y-10)^2=85$.

ג. $\text{A}(0,17)\ ;\ \text{B}(0,3)$ ד. 42 יח״ש.

37) א. $(x-10)^2+y^2=25$. ב. $y=0.5x-2.5$. ג. $\text{B}(13,4)$. ד. 10 יח״ש $=S_{\text{AMB}}$.

38) א. $\text{A}(-2,0)\ ;\ \text{B}(-6,0)$. ב. $\text{Q}(2,0)$. ג. $y=x-2$.

39) א. $(x-16)^2+(y-R)^2=R^2$, המעגל אינו חותך את ציר ה- y .

ב. $(x-16)^2+(y-10)^2=100\ ,\ R=10$ ג. $y=-\frac{3}{4}x+34\frac{1}{2}$ ד. $y=\frac{4}{3}x+5\frac{1}{3}$

ה. 1. $\text{C}(14,24)$. 2. 50 יח״ש.

40) א. $a=-8$. ב. $\text{B}(6,0)$. ג. $y=0.5x-3$. ד. $(10,2)$.

ה. $11+5\sqrt{5}$ יח״ש $=S_{\text{DECBO}}$.

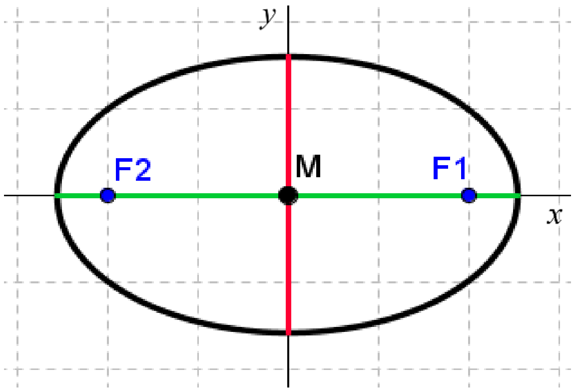
41) א. $\sqrt{34}$ יחידות אורך $=R$, $(x-5)^2+(y-3)^2=34$. ב. $\text{A}(10,0)\ ;\ \text{B}(0,6)$.

ג. 1. $\text{C}(20,0)$. 2. 30 יח״ש $=S_{\text{ABC}}$.

האליפסה:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



מושגים באליפסה:

1. הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x (ראה איור).
2. הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y (ראה איור).
3. מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
4. מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורך סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2c$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
5. רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
6. מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
7. קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

8. משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
9. הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
10. מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $\left(-3\sqrt{3},2\right)$.

5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2+y^2=16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $\left(\sqrt{10},0\right)$.

6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.

7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $\left(-2,\sqrt{6}\right)$ ו- $\left(\sqrt{14},1\right)$.

8) מצא על האליפסה $3x^2+4y^2=144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $\left(-3,1\right)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

10) מצא על האליפסה $x^2+3y^2=12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2+4y^2=50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{}+\frac{y^2}{}=1$ והישר $y=2x+k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2+5y^2=120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$
כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

15) באליפסה $5x^2+9y^2=90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.
מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

16) באליפסה $x^2+5y^2=16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y.
מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $(4\sqrt{2},0)$.

18) מצא באליפסה $2x^2+3y^2=12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5,1)$.

19) ישר שמשוואתו $x-y-3=0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2,-1)$.
מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2\sqrt{2},-2)$.

20) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{\cdots}-\frac{y^2}{\cdots}=1$ $(0<a\neq 5)$.
א. 1. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?
2. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?
ב. הוכח כי בעבור $a=4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

1) $2a=12\ ,\ 2b=6$.

2) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{3}=1$.

3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$.

4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$.

6) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

7) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$.

8) $(4,\sqrt{24})\ ,\ (4,-\sqrt{24})\ ,\ (-4,\sqrt{24})\ ,\ (-4,-\sqrt{24})$.

9) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

10) $(\sqrt{6},\sqrt{2})\ ,\ (-\sqrt{6},\sqrt{2})\ ,\ (\sqrt{6},-\sqrt{2})\ ,\ (-\sqrt{6},-\sqrt{2})$.

11) $y=\sqrt{6}x$.

12) משיק: $k=\pm12$, חותך: $-12<k<12$.

13) 60 יח"ש $=S$.

14) $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

15) $26\frac{2}{3}$ יח"ש $=S$.

16) $(1,\sqrt{3})\ ,\ (1,-\sqrt{3})$.

17) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$.

18) $y=-x+2.5$.

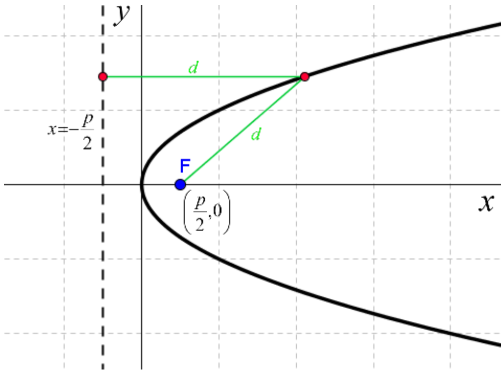
19) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$.

20) א. 1. $a=\sqrt{12.5}$. 2. $a\neq\sqrt{12.5}$.

הפרבולה:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.



מושגים בפרבולה:

1. מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
2. מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
3. קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
4. רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
5. מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
6. קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה-x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

7. משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

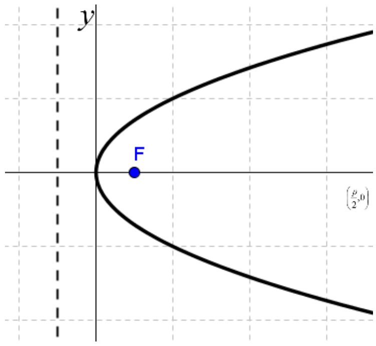
8. משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.
9. שיפוע המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה הוא: $m = \frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

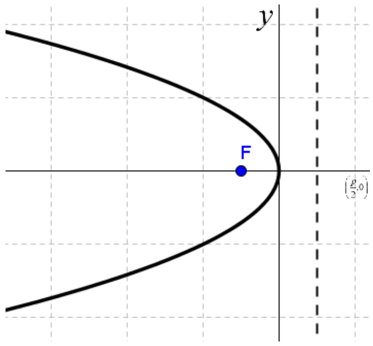
10. משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2=2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0,y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2=-2px$:



<u>שאלות:</u>

1) נתונה הפרבולה $y^2=18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x=-3$ הוא המדריך שלה.

3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9,-6)$.

5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2+2y^2=18$.

6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=10x$.

10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=2px$.

11) נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- x, וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2=20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

13) קצות מיתר בפרבולה $y^2=4x$ הם A ו- B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- x של נקודה A הוא 4.

14) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{\ }}$.

15) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{-}, \frac{1}{-}\right)$.

16) נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר $y = 2x + k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

17) נתונה הפרבולה $y^2 = 6x$.

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x = 1\frac{1}{-}$.

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- x.

18) הנקודות A ו- B נמצאות על הפרבולה $y^2 = 12x$. נתון כי $y_A = 4$. מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

19) נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 28x$ ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- x הוא $7\sqrt{5}$. מצא את משוואת הנורמל.

20) מרחק המוקד של הפרבולה $y^2 = 8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$.
מצא את משוואת המשיק.

21) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p.

22) נתונות שתי פרבולות: $I.\ y^2 = 6x\ ,\ II.\ y^2 = 12x$
ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו- B.
הראה כי המשיקים בנקודות A ו- B מקבילים.

23) נתונה הפרבולה $y^2 = 14x$ והנקודה $(-1, -3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה.
מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

24) נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- x שלה קטן ב- 1 משיעור ה- y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18.
מצא את משוואת המיתר.

25) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2 = 24x$ והוא משיק למדריך שלה.

26) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8, 0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2 = 10x$ בשתי נקודות.

27) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה- x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.

28) הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה- y.

29) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ שבה $p > 4$.
הישר $x = 2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו- B. מצא את שיעורי קדקוד C של משולש ΔABC שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו.

30) אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 16$ חותכת את הפרבולה $y^2 = 2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

<u>תשובות סופיות:</u>

1) $p = 9, F(4\frac{1}{2},0)$. **2)** $y^2 = 12x$. **3)** $y^2 = 10x$. **4)** $y^2 = 4x$. **5)** $y^2 = 12x$.

6) $(2\frac{1}{2},\sqrt{15})$, $(2\frac{1}{2},-\sqrt{15})$. **7)** $(1,\sqrt{8})$, $(1,-\sqrt{8})$. **8)** $(\frac{p}{4},\frac{p}{\sqrt{2}})$, $(\frac{p}{4},-\frac{p}{\sqrt{2}})$.

9) $S_{OAB} =$ יח"ש $300\sqrt{3}$. **10)** $S_{ABO} =$ יח"ש $12\sqrt{3}p^2$. **11)** $S_{ABC} =$ יח"ש $3\sqrt{3}p^2$.

12) $S_{ABCF} =$ יח"ש $40\frac{5}{8}$. **13)** $B(\frac{1}{4},-1)$ או $B(\frac{1}{4},1)$. **14)** $y = 2x$ או $y = -2x$.

15) $y = 2x - 2$. **16)** $k = \frac{1}{2}$. **17)** א. $y = x + 1\frac{1}{2}$, $y = -x - 1\frac{1}{2}$. **18)** $B(6\frac{3}{4},-9)$.

19) $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8}$. **20)** $y = x + 2$. **21)** $A(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p)$. **23)** $7x + 3y - 7 = 0$.

24) $y = -9x + 18$. **25)** $(x-6)^2 + y^2 = 144$. **26)** $(x-8)^2 + y^2 = 55$.

27) $(x - 2\frac{1}{2}p)^2 + y^2 = 4p^2$. **28)** $(x-1\frac{1}{4})^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{16}$. **29)** $C(p+2,0)$.

30) $y^2 = 1\frac{1}{2}x$.

מקומות גאומטריים:

הגדרה:

מקום גאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.

מקום גאומטרי הוא משוואה המקשרת בין x ל- y.

טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:

בשאלות של מקום גאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

1. שיפועים:
   - שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).
   - שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא 1-).
   - שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.
2. משפט פיתגורס.
3. אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.
4. משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.
5. קטע מרכזים:
   - במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים.
   - במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.
6. משפטים מגאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)
7. אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה.

שאלות:

1) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-7,-6)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(9,2)$.

2) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(3,-6)$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $B(-1,10)$.

3) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(1,0)$ קטן פי 3 ממרחקן מהישר $x=9$.

4) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה $(6,0)$ ומשיקים לישר $x=-6$.

5) נתונים שני ישרים: $I.\ 3x+y-6=0$, $II.\ 2x+6y-1=0$ מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II.

6) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- y ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?

7) מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה $(4,-10)$ עם נקודות על הישר $y=6x+2$.

8) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+12x-16y=0$. מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.

9) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=36$. הכפילו את שיעורי ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$. מצא את המקום הגאומטרי שמתקבל באופן הזה.

10) נתונות הנקודות $A(2,0)$ ו- $B(10,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים ΔABC אם ידוע שקדקוד C מונח על הישר $y=3x-12$. מהי ההגבלה?

11) נתון המעגל $x^2+y^2+4x-10y+11=0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה $(7,2)$.

12) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ בזווית של 120^o.

13) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בזווית של 60^o.

14) נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $x^2+y^2-12x-64=0$. מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C. בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה- x. המקביל ל- AM והמקביל לציר ה- x נפגשים בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודה D. מהן ההגבלות?

15) האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ חותכת את חלקו החיובי של ציר ה- x בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה- y בנקודה B. מנקודה C שעל ציר ה- x בין O ל- A (O ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה- x שחותך את הישר AB בנקודה D.
מצא את המקום הגאומטרי של נקודת מפגש הישרים BC ו- OD.

16) נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה C. נסמן ב- B את אמצע הקטע AC. מנקודה C העבירו מקביל ל- AO (O ראשית הצירים). מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל- AO.

17) נתונות הנקודות $A(4,0)$ ו- $B(-2,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית C במשולש ΔABC.

18) נתון מעגל קנוני שרדיוסו R. את נקודה A שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים ועל הקטע AO (O ראשית הצירים) סימנו נקודה B כך שמתקיים $AB:BO=a:b$. מנקודה A העבירו אנך לציר ה- x ומנקודה B העבירו אנך לציר ה- y.
א. מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו.
ב. המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- y בנקודות P ו- Q. מצא את אורך הקטע PQ.

<u>תשובות סופיות:</u>

1) $y=8x$ 2) $(x+1\frac{1}{2})^2+(y-12)^2=38\frac{1}{4}$ 3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ 4) $y^2=24x$

5) $x+11y+4=0\ ,\ 7x+13y-8=0$ 6) $y^2=16-8x\ ,-4<x,y<4$ 7) $y=6x-16$

8) $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ 9) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 10) $y=3x-16\ ,\ x\neq 5\frac{1}{3}$ 11) $y=3x-7$

12) $(x-2)^2+(y-1)^2=12$ 13) $(x-a)^2+(y-b)^2=4R^2$ 14) $x=6,-10<y<10$

15) $3x+8y-12=0\ ,\ 0<x<4\ ,\ 0<y<3$. **16)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **17)** $(x+4)^2+y^2=16$.

18) א. $b^2x^2+(a+b)^2y^2=R^2b^2$. ב. $PQ=\frac{2bR}{\ldots}$.

תרגילי הוכחה:

1) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2+y^2=R^2$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישרים $x=R$ ו- $x=-R$ בנקודות A ו- B . הוכח: $y_A \cdot y_B=R^2$.

2) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2+y^2=R^2$, שחותך את ציר ה- y בנקודות $A(0,R)$ ו- $B(0,-R)$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר $y=R$ בנקודה T . הוכח: $OT \parallel BP$.

3) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, ש- F_1 ו- F_2 הם מוקדיה.
הוכח: $PO^2+PF_1 \cdot PF_2=a^2+b^2$ (O ראשית הצירים).

4) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, שקדקודה הימני הוא A וקדקודה השמאלי הוא B . הישר AP חותך את הישר $x=-a$ בנקודה K והישר BP חותך את הישר $x=a$ בנקודה L . הוכח: $y_K \cdot y_L=4b^2$.

5) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.

6) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, שקדקודה הימני הוא A , קדקודה השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא F_1 . הישר AP חותך את הישר $x=\frac{a^2}{c}$ בנקודה M והישר BP חותך את הישר $x=\frac{a^2}{c}$ בנקודה N .
הוכח: $\sphericalangle MF_1N=90^o$.

7) נתונה האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא $-\frac{b^2}{\ldots}$.

8) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים נורמל.
הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה- x הוא גודל קבוע.

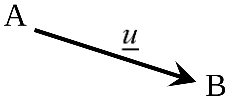
9) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו- B . המשיקים נפגשים בנקודה C . הוכח: $y_A+y_B=2y_C$.

10) בנקודה A , שעל הפרבולה $y^2=2px$ מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדריך שלה בנקודה B . ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המשיק בנקודה C . הוכח : $FB=FC$ (F - מוקד הפרבולה).

11) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו- B . המיתר חותך את ציר ה- x בנקודה C . הוכח : $x_A\cdot x_B=(x_C)^2$.

פרק 2 – ווקטורים:

ווקטורים גיאומטריים:



הגדרה כללית:

להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי:

ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

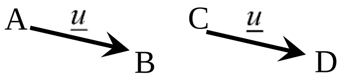
ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

1. ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.

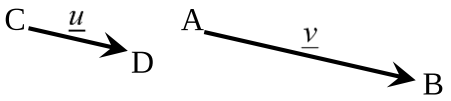
   דוגמא לווקטורים מקבילים:

   מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2. ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
   - ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
   - ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".

   דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:

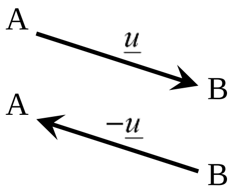
   

   עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$,

   או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.

3. אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים

   אז מתקיים: $\frac{\alpha}{} = \frac{\beta}{} = \frac{\gamma}{}$.

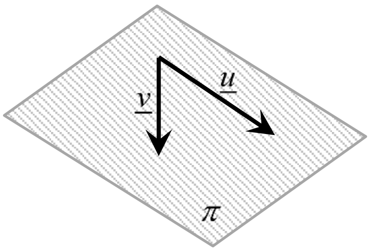


ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל **גודל** זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$ וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

וקטורים הפורשים מישור:

כל שני וקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:
הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים
את המישור π.



קומבינציה לינארית של וקטורים:

1. כל וקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה לינארית של שני וקטורים הפורשים את המישור.
2. כל וקטור שהוא שקומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
3. אם ניתן להביע וקטור שקומבינציה לינארית של שני וקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים **תלויים ליניארית** (ניתן לבטא כל וקטור באמצעות האחרים).

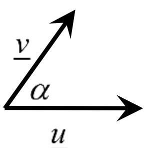
דוגמא:
עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל וקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם.
במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-$\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

המכפלה הסקלרית וגודל של וקטור:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$$

כאשר: α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



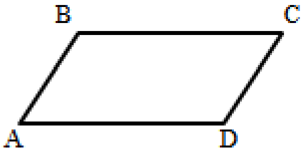
ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.

גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2 = \underline{u}^2$.

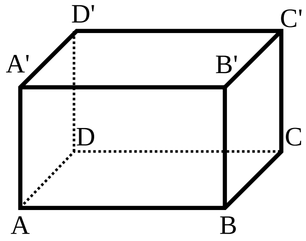
***הערה:**
המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

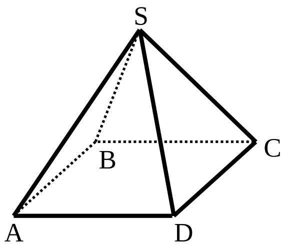
1) במקבילית ABCD נתון: $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



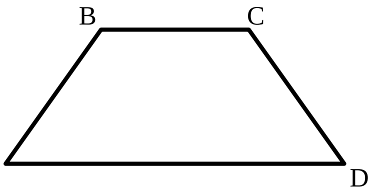
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AD}=\underline{v}$, $\vec{AA'}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה
ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



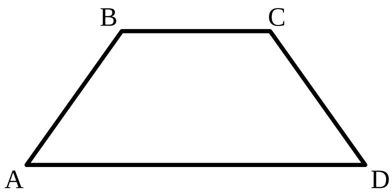
3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AD}=\underline{v}$, $\vec{AS}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה
השווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



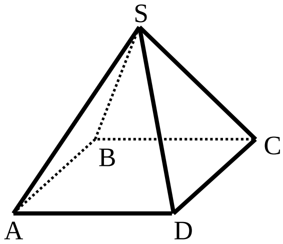
4) בטרפז $ABCD$ שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AD}=\underline{v}$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן
להביעם באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AD}=\underline{v}$.
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\vec{AC}$ ו- $\vec{DC}$.
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{BE}$.
ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{AF}$.



6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\vec{AB}=\underline{u}$, $\vec{AD}=\underline{v}$, $\vec{AS}=\underline{w}$.
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את
הווקטורים $\vec{AC}$ ו- $\vec{SC}$.
ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\vec{BN}$.



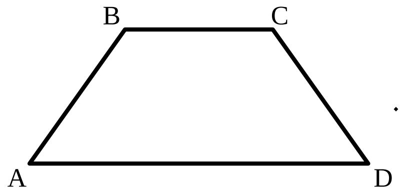
7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש : $AP:PB=2:3$. נתון : $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש : $AP:PB=3:5$. נתון : $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

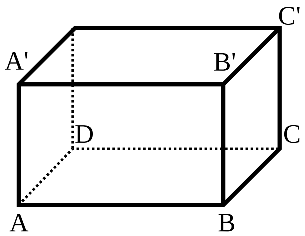
9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש : $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון : $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש : $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון : $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

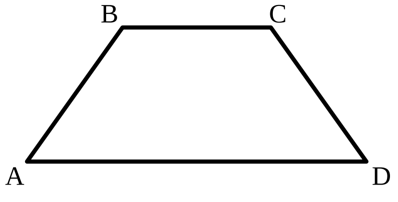
11) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון : $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD ומקיימת : $\frac{DF}{FC}=\beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



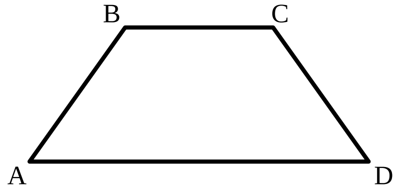
12) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון : $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת : $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$
והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת : $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור : $\overrightarrow{PQ}$.



13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון : $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.
הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת : $\frac{AF}{FD}=\alpha$.
מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AB}$.



14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

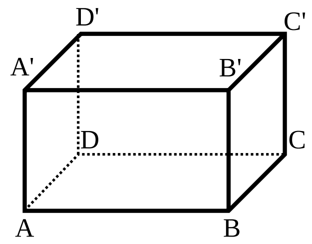


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$.

15) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

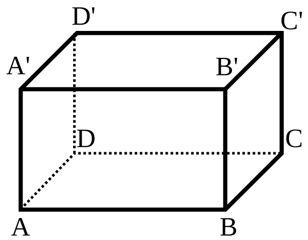
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$.

16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

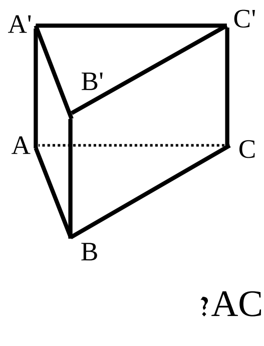
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?

17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



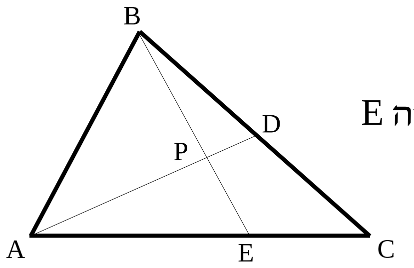
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

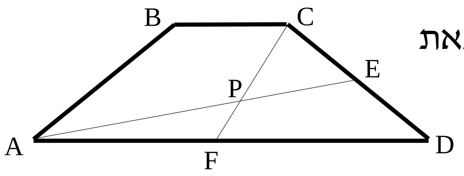
ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'. הבע את α באמצעות β .



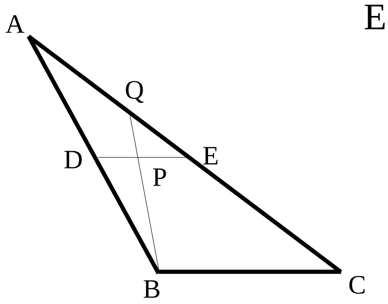
18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E
נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE} = 2$.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נגדיר: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



19) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD והנקודה F נמצאת
באמצע הצלע AD.הנקודה P היא מפגש
הקטעים AE ו-CF. מצא באיזה יחס מחלקת
הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.

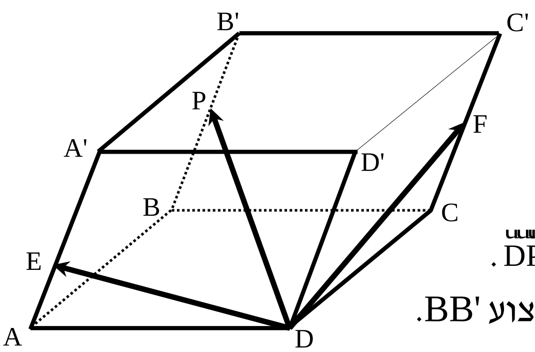


20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E
נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle DPB}}$.

21) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',
הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת
על המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D , E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|u|=3$. $|v|=2$. $\alpha=60^o$

ב. $|u|=4$. $|v|=5$. $\alpha=120^o$

ג. $|u|=2$. $|v|=6$. $\alpha=30^o$

ד. $|u|=8$. $|v|=3$. $\alpha=180^o$

ה. $|u|=3$. $|v|=5$. $\alpha=0^o$

ו. $|u|=7$. $|v|=4$. $\alpha=90^o$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $|u|=3$. $|v|=4$. $u\cdot v=6$

ב. $|u|=4$. $|v|=2$. $u\cdot v=-4\sqrt{3}$

ג. $|u|=9$. $|v|=5$. $u\cdot v=0$

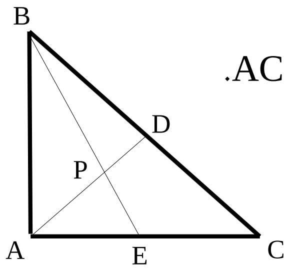
ד. $|u|=2$. $|v|=6$. $u\cdot v=12$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6\,,\,|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120^o.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

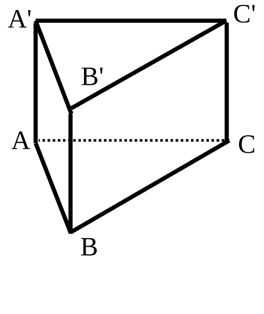
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4\,,\,|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6\,,\,|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120^o.
חשב את גודל הזווית $\angle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

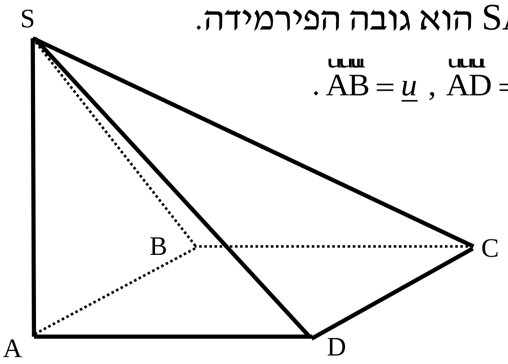
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle BAC=90^o$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\angle DPC$.



28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
חשב את גודל הזווית: $\angle MAN$.



29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.



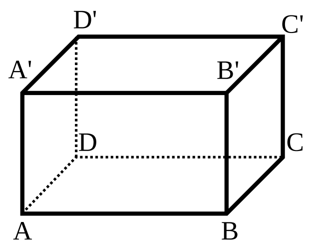
נתון : $AB = AD = \frac{1}{2}AS = k$. נסמן : $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC

והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית : $\sphericalangle PAQ$.

30) בתיבה ABCDA'B'C'D'



נתון : $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}}AD = AA'$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת : $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים : $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\sphericalangle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת : $\cos\sphericalangle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים : $S_{ABCD} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים : $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS} \perp \overrightarrow{AC}$.
הוכח : $\overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{AB}$.

36) הוכח : וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

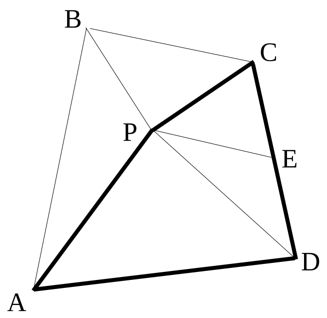
37) א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC.

הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח: $\vec{AP}=\frac{1}{3}\left(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\vec{AS}$ ו- $\vec{AP}$ מאונכים ל- $\vec{BC}$.

הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\vec{AS}=\underline{w}$, $\vec{AC}=\underline{v}$, $\vec{AB}=\underline{u}$).



38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD
כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים
ישרי זווית ושו"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\vec{PE}\perp\vec{AB}$.
(הדרכה: סמן $\vec{PD}=\underline{d}$, $\vec{PA}=\underline{c}$, $\vec{PC}=\underline{b}$, $\vec{PB}=\underline{a}$).

39) בטטראדר SABC נתון: $\vec{AS}=\underline{w}$, $\vec{AC}=\underline{v}$, $\vec{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\vec{AP}=\alpha\cdot\vec{AS}$.
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\vec{SQ}=\beta\left(\vec{SB}+\vec{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\vec{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\vec{PQ}\perp\vec{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן.
הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים,
אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u} = \overrightarrow{DC}\ ,\ \underline{v} = \overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{u} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}\ ,\ \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{u} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}\ ,\ \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\ ,\ \underline{w} = \overrightarrow{AS}$.

4) $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$. ב. $\overrightarrow{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$. ג. $\overrightarrow{AF} = \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u}$.

6) א. $\overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}\ ,\ \overrightarrow{AC} = \underline{v} + \underline{u}$. ב. $\overrightarrow{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{PB} = \frac{5}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{AP} = \alpha\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{PB} = (1-\alpha)\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha = 2$.

14) $\alpha = 1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. לא. ג. $\alpha = \frac{1}{2}\ ,\ \beta = 1$.

16) א. $\overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. $\alpha = 1$. ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM} = (\beta-1)\underline{u} + (\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta)\underline{v} + \underline{w}$. ב. $\beta = 1$. ג. $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$.

18) א. $\overrightarrow{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}$. ב. $AP:PD = 4:1$.

19) $CF:PF = 2:1$.

20) א. $AQ:QC = 1:2$. ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3}$.

21) א. $\overrightarrow{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w}$. ב. $B'P:PB = 1:5$. ג. כן.

22) א. 3. ב. -10. ג. $6\sqrt{3}$. ד. -24. ה. 15. ו. 0.

23) א. $60°$. ב. $150°$. ג. $90°$. ד. $0°$.

24) $\overrightarrow{PQ} = 18.248$.

25) $\overrightarrow{MN} = \sqrt{29}$.

26) $31.87°$. 27) $55.49°$. 28) $70.623°$. 29) $24.095°$.

30) א. $\alpha = \frac{3}{4}$. ב. $\cos(PAQ) = \frac{\frac{1}{2}}{1\ \ldots}$. ג. $\alpha = \frac{1}{2}$.

39) א. $\alpha + 2\beta = 1$.

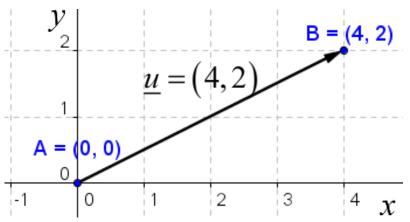
וקטורים אלגבריים:

הגדרה כללית:

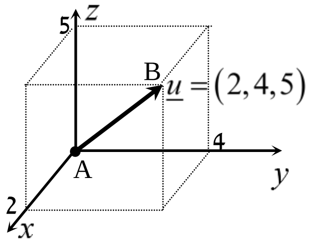
וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:

הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



הווקטור: $\underline{u}=(2,4,5)$ נמצא במרחב הקרטזי.
מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$
וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.



ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:

$$\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

1. אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$
הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
2. שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם:
$x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}\ ;\ y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}\ ;\ z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של ווקטור בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

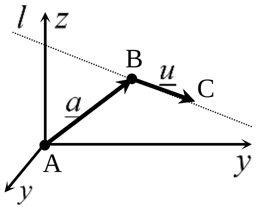
כאשר : α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

גודלו של ווקטור $\underline{u}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ נתון ע״י : $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע״י שני ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.



הווקטור $\underline{u}$ נקרא **ווקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע״י : $l:\ \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע״י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

דוגמא :
עבור הנקודות : $\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(5,3,1)$ ו-$\mathrm{C}(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים :
$$\underline{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathrm{B}-\mathrm{A}=(5,3,1)\ ;\ \ \underline{u}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\mathrm{C}-\mathrm{B}=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$$
לכן הצגה פרמטרית של הישר היא : $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

***הערות:**

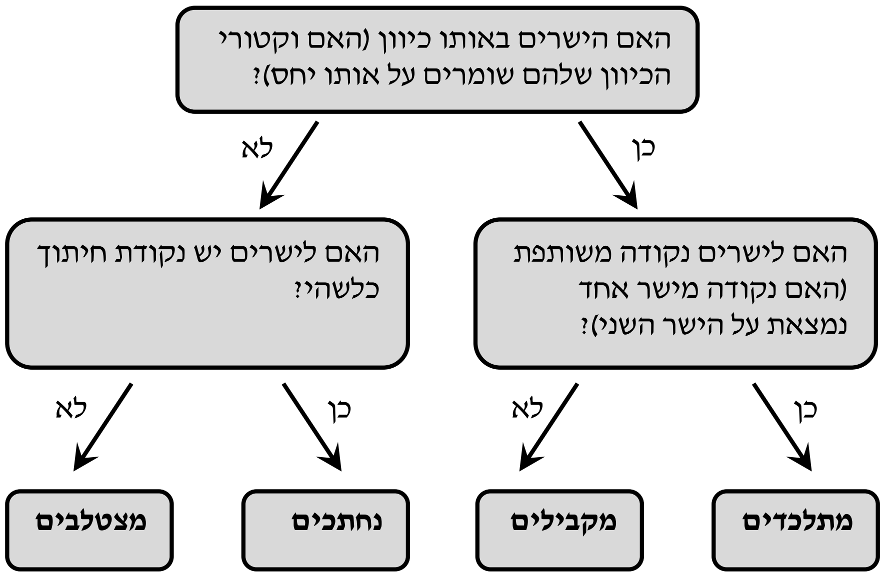
1. לישר יש אינסוף הצגות פרמטרים הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון. ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא :
$$l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$$
2. הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע״י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של ישר, יתקבל ע״י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
3. הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
4. הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותן ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

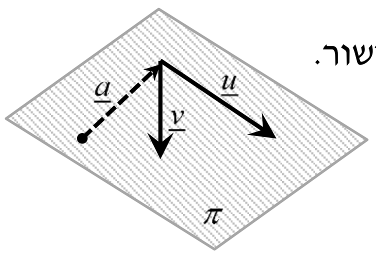
כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור:

מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.



הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi: \ \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע״י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על המישור π.

משוואת מישור:

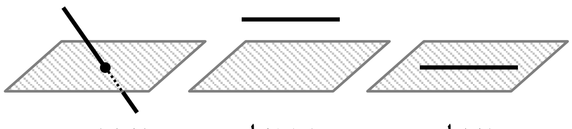
ניתן להציג מישור ע״י משוואה באופן הבא: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{} = \frac{b_1}{} = \frac{c_1}{} = \frac{d_1}{}$	$\frac{a_1}{} = \frac{b_1}{} = \frac{c_1}{} \neq \frac{d_1}{}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות:

1. זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע״י: $\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
2. זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
3. זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$
   תחושב ע״י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha = \left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
4. זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
   ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע״י: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות:

1. מרחק בין שתי נקודות $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא:
   $d_{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
2. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע״י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא תא נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע״י:
   $d = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע״י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקהּ מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע״י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקהּ מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
   - שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקהּ מהמישור השני.
   - שימוש בנוסחה: $d = \left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע״י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

שאלות:

1) שרטט את הווקטורים הבאים:

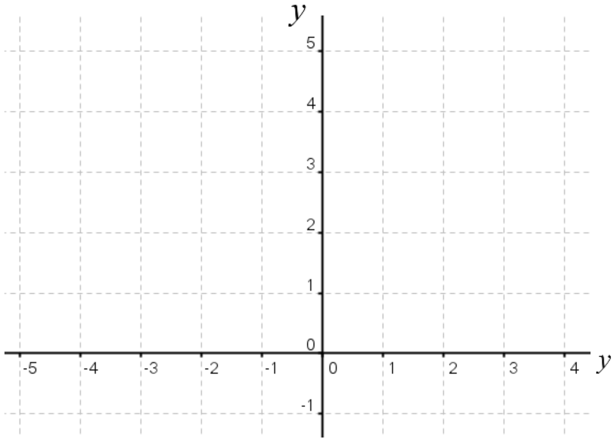
א. $\underline{u}=(4,2)$

ב. $\underline{v}=(-5,1)$

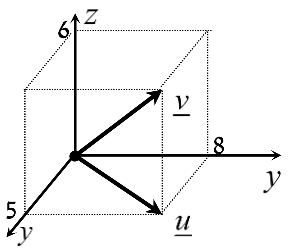
ג. $\underline{w}=(3,-4)$

ד. $\underline{a}=(0,3)$

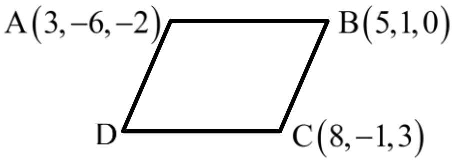
ה. $\underline{b}=(-5,0)$



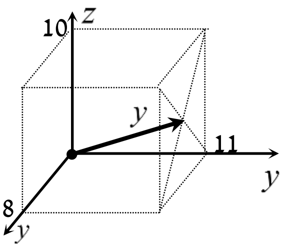
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט:



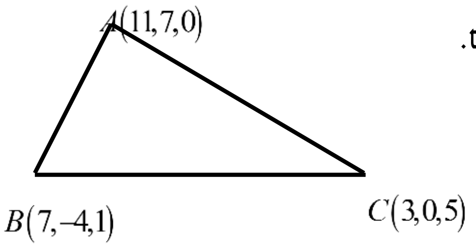
3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקדקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט:



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



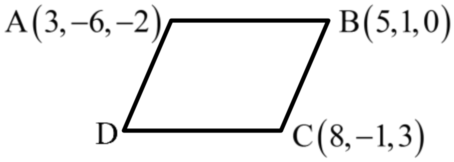
6) א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו- $B(6,1)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

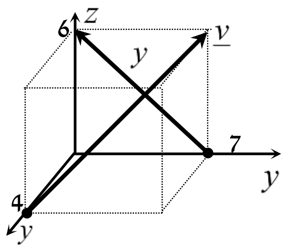
7) א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

8) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.



9) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$:



10) נתונים שני וקטורים : $\underline{u}=(3,7,1)$, $\underline{v}=(2,-3,5)$. חשב :

א. $\underline{u}+\underline{v}=$ ב. $\underline{u}-\underline{v}=$ ג. $2\underline{u}=$ ד. $3\underline{u}-\underline{v}=$ ה. $\underline{u}\cdot\underline{v}=$

11) חשב את גודלו של הווקטור $\underline{u}=(1,-2,4)$.

12) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

13) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.
א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.
ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

14) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}=(3,7,1)$ ו- $\underline{v}=(2,-3,5)$:

15) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

16) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם : $A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

17) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

18) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $l:\ \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

19) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $l:\ \underline{x}=t(2,-1,5)$?

20) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

21) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

22) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $l:\ \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

23) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

24) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

25) מצא את נקודת החיתוך של הישר $l:\ \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

26) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_1:\ \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$, $l_2:\ \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$.

27) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_3:\ \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$, $l_4:\ \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$.

28) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_5:\ \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$, $l_6:\ \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$.

29) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_7:\ \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$, $l_8:\ \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$.

30) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_9 :\ \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $l_{10} :\ \underline{x} = s(6,0,-2)$.

31) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$l_{11} :\ \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $l_{12} :\ \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$

32) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים:

$l_1 :\ \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1,-2,2)$, $l_2 :\ \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

33) נתונות הנקודות: $A(3,-1,5)$, $B(k,-1,3)$, $C(-6,3,-1)$, $D(-2,3,k)$.
הראה כי לכל ערך של k הישרים l_{AB} ו- l_{CD} מצטלבים.

34) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:

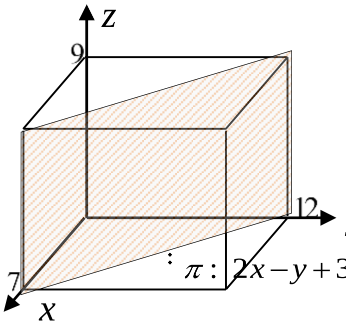
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

35) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $l :\ \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4)$.

36) נתונים שני ישרים: $l_1 :\ \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3)$, $l_2 :\ \underline{x} = (2,16,11) + s(0,1,-6)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

37) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- x .

38) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



39) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו

40) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi :\ 2x - y + 3z - 6 = 0$:

א. $D(5,7,1)$. ב. $E(2,-1,1)$.

41) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור: $\pi:\ kx-2y+(k+1)z+7=0$.

42) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

43) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

44) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ x+4y-z+8=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

45) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 2x+3z-12=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

46) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi:\ \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

47) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi:\ \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

48) המישור π עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$, $B(2,0,0)$, $C(4,-1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

49) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(5,-4,1)+t(0,2,-1)$, $l_2:\ \underline{x}=(0,-6,2)+s(0,-2,1)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

50) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(-1,1,3)+t(3,-2,4)$, $l_2:\ \underline{x}=(-7,1,0)+s(4,-3,0)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר l_1
ומקביל לישר l_2.

51) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- z.

52) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

53) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

54) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l:\ \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$, $\pi:\ 2x-y-3z+6=0$.

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

55) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l:\ \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$, $\pi:\ x-3y+2z-11=0$.

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

56) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l:\ \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$, $\pi:\ 2x+y+6z+11=0$.

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

57) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l:\ \underline{x}=(0,3,-2)+t(1,-1,2)$, $\pi:\ \underline{x}=(-1,0,2)+s(1,0,-2)+r(3,0,-1)$.

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

58) נתונים הישר והמישור הבאים:

$l:\ \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$, $\pi:\ 2x-y+z-4=0$.

מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

59) נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_1:\ x-3y+2z-1=0$, $\pi_2:\ 4x+y-z-6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

60) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1:\ 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2:\ 4x-2y+8z-10=0$.

ב. $\pi_3:\ x+3y-z+1=0$, $\pi_4:\ 3x+9y-3z-8=0$.

ג. $\pi_5:\ 5x-2y-z+3=0$, $\pi_6:\ 2x+3y+z-5=0$.

61) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_2:\ 4x+12y-4z+k^2-2=0$, $\pi_1:\ 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$.

מצא את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

62) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקדקודים הבאים:

$A(1,-1,4)$, $B(9,0,2)$, $C(5,2,-2)$.

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

63) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1:\ 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2:\ 2x-y+z+10=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

64) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3:\ 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4:\ 2x-3y+z+4=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5:\ 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6:\ 5x-2z+20=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7:\ x-2y-z+6=0$, $\pi_8:\ z-2=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi:\ 6x-5y+z+18=0$ עם המישור $[xz]$.

68) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ x-3y+2z-1=0$, $\pi_2:\ 4x+y-z-6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

69) המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.

הישר $l:\ \underline{x}=(4,1,-1)+t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

70) נתונים ישר ומישור: $l:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(3,1,-1)$, $\pi:\ 4x-2y-3z-6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר l על המישור.

71) מצא את הזווית שבין הישרים הבאים:

$l_1:\ \underline{x}=(3,-11,2)+t(2,4,-1)$, $l_2:\ \underline{x}=(7,0,-1)+s(0,5,-1)$

72) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$l:\ \underline{x}=(1,0,3)+t(-3,1,-5)$, $\pi:\ 2x-y-3z+5=0$

73) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$$\pi:\ 3x-2y+2z+9=0 \quad , \quad l:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$$

74) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:

$$\pi_2:\ 5x-y-z+10=0 \quad , \quad \pi_1:\ 3x+2y-z-8=0$$

75) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:

$$\pi_2:\ 4x-7y+5z+3=0 \quad , \quad \pi_1:\ 4x+3y+z-12=0$$

76) מצא את המרחק שבין הנקודות $A(-1,3,2)$ ו- $B(9,1,0)$.

77) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(-4,12,-5)$ לישר $l:\ \underline{x}=(1,1,-4)+t(3,-1,2)$.

78) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $l:\ \underline{x}=t(2,0,-7)$.

79) נתונות הנקודות: $A(1,6,-1)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-4,0)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

80) על הישר $l:\ \underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצא את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

81) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(5,3,-1)$ למישור $x-2y+2z-12=0$.

82) מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

83) מצא משוואת מישור המאונך לישר $l:\ \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

84) נתונים ישר ומישור: $l:\ \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$, $\pi:\ 2x+4y-4z+15=0$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

85) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקדקודיה הם:

$$A(1,6,-1),\ B(2,-1,0),\ C(6,-4,0),\ S(11,-2,4).$$

86) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.
נתון: $SA=6\ ,\ SB=8\ ,\ SC=12$.
חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקדקוד S לבסיסABC.

87) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(-4,6,4)+t(2,3,0)$ ו- $l_2:\ \underline{x}=(1,7,1)+s(2,3,0)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

88) נתונים ישר ומישור: $l:\ \underline{x}=(2,-4,1)+t(-5,1,-4)$ ו- $\pi:\ 2x+6y-z+6=0$.
הראה שהישר מקביל למישור ומצא את המרחק שבין הישר למישור.

89) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x+2y-z+7=0$ ו- $\pi_2:\ 2x+2y-z-5=0$.
הראה שהמישורים מקבילים ומצא את המרחק שביניהם.

90) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

91) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1:\ x-2y-2z+6=0$ ו- $\pi_2:\ x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

92) נתונים שני הישרים הבאים:
$l_2:\underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)\ ,\ l_1:\underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

93) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:
$l_3:\ \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$, $l_4:\ \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם:

94) מצא את מרחק הישר $l:\ \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

95) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8. משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1:\ 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא: $\pi_2:\ x+2y-2z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

96) נתונים שני ישרים: $l_1:\ \underline{x}=(-2,1,5)+t(5,-4,2)$, $l_2:\ \underline{x}=(-7,3,-1)+s(-5,4,-2)$.
א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.
ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1.
מצא את משוואות המישורים π_1 ו- π_2.

97) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x-y+4z-8=0$, $\pi_2:\ x-y+2z-4=0$.
המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA=m$ (O ראשית הצירים).
הזווית שבין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.
מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m.

98) נתונות שלוש נקודות: $A(3,-1,1)$, $B(2,-1,0)$, $O(3,1,0)$.
הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.
מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A
(הישר נמצא במישור המעגל).

99) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

100) נתונים מישור וישר: $\pi:\ 2x-y+2z+1=0$, $l:\ \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

101) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x-4y+4z-5=0$, $\pi_2:\ 4x-2y+4z-1=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

102) נתונים ישר ומישור: $l_1:\ \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$, $\pi:\ 6x+2y-z+5=0$.
ישר נוסף, l_2, המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר l_1
בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה 'P היא הקרובה ביותר
לנקודה P והנקודה 'Q היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצא את שטח המלבן 'PQQ'P.
(הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של l_2).

103) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x+y+z-5=0$, $\pi_2:\ 3x+y+2z+11=0$.
l_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר l_1 ויוצר זווית של 60^o עם הישר
$l_2:\ \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור π_3 .

תשובות סופיות:

2) $\underline{u}=(5,8,0)$, $\underline{v}=(5,8,6)$. 3) $D(6,-8,1)$. 4) $\underline{u}=(4,11,5)$. 5) $(7,1,2)$.

6) א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$. ב. $Q=(12,8)$. 7) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$. ב. $N(-1,-5,10)$.

8) $D(6,-8,1)$. 9) $\underline{u}=(0,-7,6)$, $\underline{v}=(-4,7,6)$.

10) א. $(5,4,6)$. ב. $(1,10,-4)$. ג. $(6,14,2)$. ד. $(7,24,-2)$. ה. -10. 11) $\sqrt{21}$.

13) ב. כן. 14) 102.19°. 15) א. 97.277°. ב. 90°. ג. 180°. 16) 10.173 יח"ש.

17) $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$. 18) כן. 19) לא. 20) $l:\underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$.

21) $l:\underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$ 22) $l:\underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$. 23) $l:\underline{x}=t(0,1,0)$.

24) $l:\underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$. 25) $(7,-5,0)$. 26) מתלכדים. 27) מקבילים.

28) נחתכים, $(1,5,0)$. 29) מצטלבים. 30) מקבילים. 31) נחתכים, $(1,8,-1)$.

32) א. $k=2$. ב. $k=-2$. 34) $\pi:\underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$.

35) $\pi:\underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$. 37) $\pi:\underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$.

38) $\pi:\underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$. 39) $\pi:\underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,1)+s(-7,12,0)$.

40) א. על המישור. ב. לא על המישור. 41) $k=3$. 42) $(3,0,0)\ ,\ (0,4\frac{1}{2},0)\ ,\ (0,0-9)$.

43) $l:\underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$. 44) $\pi:\underline{x}=(0,0,8)+t(0,-2,-8)+s(-8,0,-8)$.

45) $\pi:\underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$. 46) $\pi:-2x+3y+z+19=0$.

47) $\pi:x-3y+8z=0$. 48) $\pi:3x+6y-z-6=0$. 51) $\pi:y=0$. 52) $k=3$.

53) 6 יח"נ. 54) הישר חותך, $(1,-1,3)$. 55) מקבילים. 56) הישר מוכל.

57) הישר חותך, $(3,0,4)$ 58) $a=1\ ,\ b=-7$. 59) $l:\underline{x}=t(1,9,13)$.

60) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. 61) א. $k\neq 2,-3$. ב. $k=-3$. ג. $k=2$.

62) $\pi_{A'B'C'D'}:2y+z+2=0$. 63) $l:\underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$.

64) $l:\underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$. 65) $l:\underline{x}=(0,4,10)+t(4,7\frac{1}{2},10)$.

66) $l:\underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$. 67) $l:\underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$. 68) $l:\underline{x}=t(1,9,13)$.

69) $\pi_1:y+z=0\ ,\ \pi_2:x+y-z-6=0$. 70) $l':\underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2)$.

71) 26.01°. 72) 21.19°. 73) 18.87°. 74) 43.94°. 75) 90°. 76) $\sqrt{108}$.

77) $\sqrt{91}$ 78) $\sqrt{54}$. 79) 12.75 יח"ש. 80) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$. 81) 5. 82) $2\frac{1}{2}$.

83) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$. 84) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

85) 20.5 יח"נ. 86) 4.46 יחידות אורך. 87) $\sqrt{22}$. 88) $\frac{15}{\sqrt{41}}$. 89) 4.

90) $\pi_1':3x-4y+5z+10=0\ ,\ \pi_2':3x-4y+5z-30=0$. 91) $\pi_3:x-2y-2z-3=0$.

92) $\frac{4}{\sqrt{[illegible]}}$. 93) 1.567. 94) $\sqrt{2}$.

95) $\pi_{DCC'D'}:x+2y-2z=0$ או $\pi_{DCC'D'}:x+2y-2z+12=0$.

96) א. מקבילים. ב. $\pi_1: 2x+2y-z+7=0$, $\pi_2: y+2z-6=0$. 97) $m=4, -\frac{4}{7}$.

98) $l: \underline{x}=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4)$. 99) $\pi: -3x+y+3z+15=0$.

100) $(0,0,4)$ או $(0,0,14\frac{4}{5})$. 101) $l: \underline{x}=(0,-14,-15\frac{3}{4})+t(-14,14,21)$.

102) 10.476 יח"ש. 103) $\pi_3: x+2y-z-58=0$ או $\pi_3: 2x+y+z-5=0$.